УДК 330.4 (338.27)

ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ И ОЦЕНКА ОЖИДАЕМОГО ОБЪЕМА ПРОИЗВОДСТВА В АСПЕКТЕ КОНЦЕПЦИИ ГРАНИЧНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ

А.В. Барминский

Предложены рекомендации (стратегия управления факторами неэффективности) экономическому объекту, занимающемуся производством, по организации операций в целях максимизации эффективности его деятельности. Указанная стратегия разработана путем анализа производственной эффективности в модели производственного потенциала, построенной в рамках концепции граничной стохастической производственной функции. Дано сравнение предложенного подхода с классическим регрессионным анализом.

Ключевые слова: производственная функция, производственные факторы, стохастическая производственная функция, концепция граничной стохастической производственной функции, факторы неэффективности, производственная эффективность.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что классическая производственная функция в экономике выглядит следующим образом:

$$P_i = \exp(\beta_0)\, L_i^{\beta_1}\, K_i^{\beta_2}, \qquad (1)$$

где P_i — объем производства некоторого экономического объекта в i-м наблюдении, $i = 1, ..., p$; L_i и K_i — объемы трудозатрат и сделанных капиталовложений соответственно; β_0, β_1 и β_2 — параметры данного объекта, постоянные при всех i.

Иногда в функцию (1) включают и другие производственные факторы, влияющие на объем производства. Такой вид производственной функции характерен для детерминированного описания производственного процесса. Однако детерминированность функции (1) не позволяет учесть случайные факторы, присутствие которых неизбежно оказывает влияние на производственный процесс.

Настоящая работа посвящена описанию концепции, призванной устранить эти недостатки, и ее цель заключается в разработке приложения, расширяющего возможности применения данной концепции.

1. КОНЦЕПЦИЯ ГРАНИЧНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ И ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ

Для устранения отмеченных недостатков вместо исходной функции (1) используют модель следующего вида, называемую стохастической производственной функцией:

$$P_i = \exp(\beta_0)\, L_i^{\beta_1}\, K_i^{\beta_2} \exp(\varepsilon_i), \qquad (2)$$

где ε_i — случайная величина, характеризующая всевозможные случайные воздействия на объем производства объекта в i-м наблюдении. Поэтому здесь P_i, $i = 1, ..., p$, — это уже случайные величины (взаимно независимые и одинаково распределенные). Заметим, что целесообразна модель именно в такой форме. Действительно, прологарифмировав выражение (2), получим линейную зависимость

$$\ln P_i = \beta_0 + \beta_1 \ln L_i + \beta_2 \ln K_i + \varepsilon_i. \qquad (3)$$

Обозначим $\ln P_i = Y_i$, $\ln L_i = x_{i1}$, $\ln K_i = x_{i2}$, логарифмы значений остальных возможных факторов обозначим через x_{i3}, ..., x_{in} (если же они не используются, то можно просто положить $x_{i3} = 0$, ..., $x_{in} = 0$). Тогда модель (3) примет вид:

$$Y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_{ij} + \varepsilon_i. \qquad (4)$$

Дальнейшим этапом в нашем построении, согласно концепции «граничной» стохастической производственной функции, изложенной в работах [1, 2] и многих других, будет разделение всех случайных воздействий на «систематические», т. е. оказывающие неустраняемое влияние на объект и не зависящие от его организации, и «несистематические», т. е. обусловленные этим объектом, точнее присущей ему неэффективностью. Таким образом, $\varepsilon_i = V_i - U_i$, где V_i — случайная величина, характеризующая влияние на объем производства объекта в i-м наблюдении многих слабо существенных по отдельности систематических воздействий, поэтому оправданно считать, что величина V_i имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и постоянной дисперсией, т. е. $V_i = N(0, \sigma_V^2)$; U_i — независимая от V_i случайная величина, характеризующая влияние факторов неэффективности на объем производства объекта в i-м наблюдении.

Плотность распределения случайной величины U_i, согласно своему экономическому смыслу, должна иметь носитель $(0, +\infty)$. Выбор же конкретного вида распределения определяется многими тонкостями, описание которых можно найти в некоторых работах. Наибольшее число исследований посвящено трем видам распределений величины U_i: экспоненциальному, так называемому «усеченному в нуле нормальному распределению» (общий вид плотности этого распределения указан в § 2) с нулевым или ненулевым параметром μ.

В построенной модели

$$P_i = \exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_{ij} + V_i - U_i\right)$$

представляет собой случайную величину, характеризующую «фактический» объем производства объекта в i-м наблюдении. Если же устранить из производственного процесса все факторы неэффективности, то, в силу упомянутого требования на свойства носителя распределения величины U_i, данный объем производства повысится до уровня

$$P_i^{pot} = \exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_{ij} + V_i\right). \qquad (4)$$

Объем производства, характеризуемый случайной величиной P_i^{pot}, в экономике принято называть «граничным» объемом производства, а соотношение (5) «граничной» стохастической производственной функцией или «моделью производственного потенциала».

Теперь введем понятие «производственной эффективности» TE_i («technical efficiency» в иностранных работах, которое в отечественных работах переводится дословно) объекта в i-м наблюдении. Данную величину в рамках концепции граничной стохастической производственной функции определим следующим образом:

$$TE_i \overset{def}{=} P_i / P_i^{pot} = \exp(-U_i).$$

Заметим, что TE_i является случайной величиной, с вероятностью 1 принимающей значения из интервала (0, 1) (т. е. плотность распределения величины TE_i имеет носитель (0, 1)), так как $0 < P_i < P_i^{pot}$ с вероятностью 1 или $U_i > 0$ с вероятностью 1. Ясно, что апостериорные оценки характеристик именно случайных величин TE_i представляют собой ключевой экономический интерес на этапе получения результатов после практического внедрения модели. Однако здесь возникает существенная трудность, обусловленная способом построения модели и связанная с тем, что случайные величины U_i ненаблюдаемы, т. е. выявить истинные значения их числовых реализаций невозможно. Выходом из данного положения представляется надлежащий подбор характеристик случайной величины TE_i. Такими наилучшими характеристиками являются, например, математическое ожидание и дисперсия случайной величины TE_i при условии, что случайная величина Y_i реализовалась и приняла значение y_i, т. е. математическое ожидание и дисперсия условной случайной величины $\{TE_i | Y_i = y_i\}$. Таким образом, выбрав наиболее подходящее распределение для случайных величин U_i, переходят к анализу случайных величин $\{TE_i | Y_i = y_i\}$.

2. РАСЧЕТ И АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА НА ОСНОВЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ

Возьмем в качестве величин U_i взаимно независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие усеченное в нуле нормальное распределение с параметрами μ_{U_i} и σ_U, т. е. пусть плотность распределения случайных величин U_i имеет вид:

$$f_{U_i}(u) = C_{\mu_{U_i}, \sigma_U} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_U} \exp\left(-\frac{(u-\mu_{U_i})^2}{2\sigma_U^2}\right)$$
$$\text{при } u > 0 \text{ и } 0 \text{ при } u < 0,$$

где $C_{\mu_{U_i}, \sigma_U}$ — нормировочная константа, $\mu_{U_i} = \delta_0 + \sum_{k=1}^{m} \delta_k z_{ik}$; $\delta_0, \delta_1, ..., \delta_m$ — числовые параметры модели; $z_{i1}, ..., z_{im}$ — значения каждого из m факторов неэффективности, влияющих на объем производства объекта в i-м наблюдении.

Выбор распределения случайных величин U_i именно в такой форме сделан автором по следующим причинам. Прежде всего, ясно, что данное распределение удовлетворяет упомянутому требованию на свойства носителя. Далее, что самое важное в нашей ситуации, данный вид распределения позволяет использовать его параметр μ_{U_i} для идентификации факторов неэффективности, т. е. в некотором роде понять, насколько изменение каждого конкретного фактора неэффективности влияет на объем производства объекта в i-м наблюдении. Идея использования именно такого распределения и, в особенности, параметра μ_{U_i} в указанной форме предложена авторами работы [3].

Следующий этап нашего построения состоит в получении оценок вектора $\boldsymbol{\theta} \overset{def}{=} (\sigma_U, \sigma_V, \delta_m, ..., \delta_1, \delta_0, \beta_n, ..., \beta_1, \beta_0)$ параметров модели на основе наблюдений $y_1, ..., y_p$, например, методом максимального правдоподобия (другие методы не будут проще в смысле вычислений). Это сама по себе сложная задача, требующая долгих теоретических вычислений (выведения логарифмической функции правдоподобия и ее частных производных) и применения численных методов поиска точки локального максимума функции многих переменных. Лучшей программой по приближенному вычислению этих оценок на текущий момент является австралийская «FRONTIER Version 4.1».

Всю необходимую теоретическую подготовку удалось осуществить и автору данной работы независимо от результатов австралийских исследователей. Кроме того, на основе этих теоретических результатов автором также была составлена программа. Эта программа (705 строк) представляет собой макрос в Excel, реализованный на языке Visual Basic for Application. Важно отметить, что полученные автором теоретические результаты, которые будут описаны далее в § 3, имеют самостоятельную ценность, т. е. не важно, какой программный продукт используется для промежуточных вычислений — программа автора или программа «FRONTIER Version 4.1».

Итак, перейдем к расчету и анализу экономических показателей производственной деятельности экономического объекта на основе статистических данных (измерений некоторых факторов этого объекта). Рассмотрим производственный объект (предприятие) со следующими факторами, измерения которых осуществлялись в течение некоторого времени:

- результат производственной деятельности — P_i — объем произведенной продукции (в денежном выражении, т. е. в ценах, установленных этим предприятием на свою продукцию, которые были постоянны в течение всего времени наблюдения) за i-й период наблюдения (день), $i = 1, ..., 60$;
- производственные факторы:

L_i — объем трудозатрат (в денежном выражении) за i-й период наблюдения (зарплата персоналу и т. п.);

K_i — объем сделанных капиталовложений (в денежном выражении) за i-й период наблюдения;

- факторы неэффективности, действовавшие в производственном процессе в течение i-го периода наблюдения:

z_{i1} — процент сырья низкого качества;

z_{i2} — процент устаревшего оборудования;

z_{i3} — процент персонала низкой квалификации.

Все измерения указанных факторов сведены в таблицу (о содержании последнего столбца таблицы будет сказано чуть далее).

Применение программы к исходным данным позволяет от начального приближения $\boldsymbol{\theta}^0$ = = (0,581771; 0,426903; 0,000000; 0,000000; 0,000000; 0,000000; 0,150734; −0,167316; 2,915334) с соответствующим значением логарифмической функции правдоподобия $L(\boldsymbol{\theta}^0) = -49{,}231512$ подняться в направлении градиентов до приближения $\boldsymbol{\theta}^{50}$ = = (0,481308; 0,000048; 0,146996; 0,091227; 0,045328; −2,259680; 0,702475; 0,214623; 1,699819) с соответствующим значением логарифмической функции правдоподобия $L(\boldsymbol{\theta}^0) = -39{,}857161$. Можно также вычислить значения стандартных ошибок и t-статистик, соответствующих оценкам параметров. Однако в рамках концепции граничной стохастической производственной функции распределение t-статистики (отношения оценки параметра к его стандартной ошибке) не является распределением Стьюдента, так как распределе-

Исходные данные и результат

Исходные данные							Результат: $\mathbf{E}\{TE_i \vert Y_i = y_i\}$
i	$y_i = \ln P_i$	$x_{i1} = \ln L_i$	$x_{i2} = \ln K_i$	z_{i1}	z_{i2}	z_{i3}	
1	1,547725	2,242410	3,559169	5,028	32,668	7,981	0,043561
2	1,789859	1,535361	4,347655	2,357	38,902	6,675	0,037120
3	2,037594	1,628260	4,497574	2,651	40,228	7,323	0,041957
4	2,581201	1,596353	3,575095	2,548	32,781	5,707	0,139088
5	2,486406	2,165275	3,327838	4,688	31,075	7,206	0,133207
6	1,726807	0,639133	4,523678	2,408	40,464	5,289	0,037330
7	1,903152	1,354796	4,584018	1,835	41,013	6,210	0,036604
8	1,752830	1,845932	4,407743	3,407	39,428	8,136	0,032081
9	2,679239	0,854415	3,660377	2,730	33,398	3,127	0,169436
10	2,620530	0,732505	4,403800	2,537	39,393	5,323	0,097290
11	3,333157	1,233143	2,248762	1,521	25,057	2,773	0,809757
12	3,614102	1,394511	4,090771	1,945	36,073	5,591	0,284030
13	2,419034	2,763116	4,292239	4,311	38,423	8,912	0,055632
14	2,223217	2,286744	3,192532	4,116	30,192	6,477	0,109694
15	3,536392	1,671136	4,180216	1,139	37,474	4,461	0,232565
16	3,269752	0,891998	4,156364	2,796	37,275	3,707	0,214113
17	3,907720	2,657229	4,816139	4,267	36,660	8,431	0,174537
18	2,838728	1,667776	4,284607	1,138	38,358	4,571	0,107651
19	3,071118	0,981329	4,232888	2,963	37,917	4,154	0,163194
20	2,937679	1,439835	4,504623	2,073	36,406	5,832	0,106934
21	2,839195	0,978702	4,475551	2,958	40,031	4,380	0,109193
22	3,677591	0,898127	3,427157	2,807	31,745	3,078	0,536613
23	3,779345	1,392161	4,540461	1,080	40,616	4,719	0,244431
24	2,915009	0,823256	3,582435	2,678	32,834	2,949	0,228078
25	2,854421	1,164752	4,546099	1,357	40,667	5,295	0,101378
26	3,496386	1,183260	4,561981	1,400	40,812	5,398	0,189747
27	2,259634	1,909839	4,385458	3,647	39,232	8,376	0,053357
28	2,810547	1,487270	3,909740	2,212	35,286	5,815	0,141569
29	3,309064	0,459322	3,943098	2,211	29,575	5,421	0,283863
30	2,880076	0,976128	3,656537	2,953	33,370	5,357	0,202328
31	3,263844	1,816289	1,671849	3,299	22,795	3,037	0,999777
32	2,506818	0,736055	0,924259	2,542	20,854	5,680	0,999756
33	3,819890	0,670390	3,726777	2,449	33,889	2,498	0,526356
34	2,311049	2,100347	4,225212	4,411	37,852	8,874	0,060346
35	2,955011	1,399951	4,351000	1,960	38,931	6,091	0,122244
36	2,459246	1,615221	4,354296	2,609	38,960	7,033	0,070933
37	2,475160	1,936869	4,594150	3,751	41,106	8,898	0,056833
38	2,679033	2,128827	3,755135	4,532	34,101	7,994	0,120565
39	3,506179	0,917490	4,900186	2,842	36,728	3,753	0,159963
40	2,540263	1,885553	2,895083	3,555	28,382	5,459	0,202309
41	2,555676	1,966972	3,282827	3,869	30,777	6,457	0,153754
42	2,762602	2,844291	3,921736	4,345	35,380	8,175	0,100000
43	2,203681	1,588419	4,479403	2,523	40,065	7,115	0,050604
44	3,023882	1,905386	3,416119	3,630	31,670	6,509	0,226590
45	3,054378	1,433893	4,562618	2,056	40,817	6,542	0,115520
46	2,525168	1,515347	3,602886	2,296	32,981	5,460	0,131228
47	3,475470	1,977270	4,492136	3,910	40,179	8,882	0,164585
48	2,745667	2,257692	3,369191	5,097	31,351	7,607	0,164396
49	2,596299	1,583299	3,912383	2,507	35,307	6,194	0,111729
50	2,325129	2,231304	3,713475	4,979	33,790	8,286	0,085247
51	2,992076	1,629851	4,143944	1,130	37,172	4,405	0,139658
52	3,293538	2,900105	4,110743	4,368	36,898	8,591	0,147135

Окончание таблицы

Исходные данные							Результат: $\mathbf{E}\{TE_i \vert Y_i = y_i\}$
i	$y_i = \ln P_i$	$x_{i1} = \ln L_i$	$x_{i2} = \ln K_i$	z_{i1}	z_{i2}	z_{i3}	
53	2,578646	2,158253	4,544985	4,658	40,657	9,809	0,062217
54	2,546942	1,231685	3,671530	1,517	33,480	4,522	0,135826
55	2,913003	0,651283	4,364728	2,424	39,051	2,843	0,136326
56	2,988355	1,820833	4,164756	3,315	37,345	7,583	0,131613
57	1,184484	1,972413	0,704585	3,890	20,005	5,139	0,238446
58	3,061426	2,233128	4,467332	4,987	39,957	9,976	0,104783
59	3,300419	2,584732	4,999952	4,237	36,810	8,440	0,084883
60	2,646529	1,726510	3,789132	2,981	34,358	6,542	0,124232

ние случайных величин Y_i не является нормальным. Поэтому проверка гипотез о статистической значимости параметров с помощью t-статистики затруднена. При сравнении же моделей (идет ли речь о способе построения модели, о включении в нее тех или иных факторов, о выборе распределения случайных составляющих или же о доверии полученным оценкам параметров) в каждом конкретном случае (для каждой конкретной выборки $y_1, ..., y_p$) предпочтение следует отдавать той модели, которой соответствует большее значение логарифмической функции правдоподобия. Пример подобного сравнения будет разобран в Заключении данной работы.

Относительно текущих расчетов отметим лишь, что положительность оценок параметров δ_1, δ_2 и δ_3 свидетельствует о правильной интерпретации воздействий z_{i1}, z_{i2} и z_{i3} как факторов неэффективности. Наконец, значения $\mathrm{E}\{TE_i|Y_i = y_i; \boldsymbol{\theta}^{50}\}$ оценок математического ожидания условной случайной величины $\{TE_i|Y_i = y_i\}$, соответствующие каждому из периодов наблюдения, приведены в последнем столбце таблицы. Как видим, наиболее эффективной оказалась производственная деятельность объекта в течение 31-го периода наблюдения ($\mathrm{E}\{TE_{31}|Y_{31} = y_{31}; \boldsymbol{\theta}^{50}\} = 0{,}999777$), а наиболее неэффективной оказалась производственная деятельность объекта в течение 8-го периода наблюдения ($\mathrm{E}\{TE_8|Y_8 = y_8; \boldsymbol{\theta}^{50}\} = 0{,}031081$).

3. ЗАДАЧА МАКСИМИЗАЦИИ ОЦЕНКИ ОЖИДАЕМОЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ И ОЦЕНКА ОЖИДАЕМОГО ОБЪЕМА ПРОИЗВОДСТВА

Вернемся к нашему построению. Итак, пусть мы получили вектор $\breve{\boldsymbol{\theta}} \overset{def}{=} (\breve{\sigma}_U, \breve{\sigma}_V, \breve{\delta}_m, ..., \breve{\delta}_1, \breve{\delta}_0, \breve{\beta}_n, ..., \breve{\beta}_1, \breve{\beta}_0)$ требуемых оценок максимального правдоподобия.

Зададимся вопросом: как *вести себя* рассматриваемому экономическому объекту, чтобы оказаться *максимально эффективным* в будущем, и что понимать под этими фразами, выделенными курсивом? Это постановка нашей задачи. Построим математическую модель для ее решения, т. е. выберем критерий. В качестве такого критерия (цели объекта на будущее) автор предлагает взять *максимизацию оценки ожидаемой производственной эффективности* (на этот раз безусловной, так как рассуждения проводятся априорно), т. е.

$$\mathrm{E}\{TE; \breve{\boldsymbol{\theta}}\} \to \max. \qquad (5)$$

В исследовании автора показано, что логарифмы $x_1, ..., x_n$ значений производственных факторов не оказывают влияния на достижение объектом своей цели (5), чего и следовало ожидать, согласно экономическому смыслу, в отличие от вектора $\mathbf{z} \overset{def}{=} (z_1, ..., z_m)$ значений факторов неэффективности. Однако вариация значений факторов неэффективности, осуществляемая объектом, ограничена многими причинами. Например, некоторые из этих факторов могут быть неуправляемыми, затем, объект может быть ограничен в финансовых затратах на проведение этих вариаций и т. д. В исследовании автора показано, при каких условиях задача (5) имеет решение (обозначим его через $\mathbf{z}^0 \overset{def}{=} (z_1^0, ..., z_m^0)$), а соответствующее ему значение оценки ожидаемой производственной эффективности — через $TE_{\max\exp}$), а также описан способ его получения в этих условиях.

Таким образом, поставленная задача полностью решена. Под фразой «вести себя» автор подразумевал вариацию значений факторов неэффективности, а чтобы оказаться «максимально эффективным» (напомним, что под этим имелась в виду максимизация оценки безусловного математического ожидания производственной эффективности) в будущем с точки зрения выбранного критерия, *объекту достаточно придать факторам неэффективности значения* $z_1^0, ..., z_m^0$. При этом оценка безусловного математического ожидания его производственной эффективности составит $TE_{\max\exp}$ и будет наибольшей среди всех возможных. Это и есть искомые рекомендации объекту по организации операций в будущем.

Теперь априорно оценим (предскажем) ожидаемый объем производства объекта, который последовал рекомендациям автора. Итак, пусть $x_1, ..., x_n$ — логарифмы предполагаемых значений производственных факторов. В исследовании автора показано, что искомая оценка

$$P_{p+1} \overset{def}{=} TE_{\max\exp}\exp(\breve{\beta}_0 + 0{,}5\breve{\sigma}_V^2) \times \\ \times L^{\breve{\beta}_1} K^{\breve{\beta}_2} (\exp(x_3))^{\breve{\beta}_3} \cdot ... \cdot (\exp(x_n))^{\breve{\beta}_n},$$

а также предложен способ максимизации оценки P_{p+1} ожидаемого объема производства объекта при наличии ограничений на вариацию значений производственных факторов, а следовательно, и максимизации оценки его ожидаемой прибыли (в абсолютном выражении) в имеющихся условиях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. КОНЦЕПЦИЯ ГРАНИЧНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ И КЛАССИЧЕСКИЙ РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ: СРАВНЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Вернемся к рассмотрению производственного объекта, описанного в § 2. Представим себе следующую ситуацию. Пусть его руководство выделило средства (с целью повышения эффективности производственного процесса), которых достаточно для закупки нового оборудования, доведя тем самым процент устаревшего оборудования до 5 %. С другой стороны, пусть в то же время у руководства есть возможность заменить часть нового оборудования устаревшим (с доплатой), доведя тем самым процент устаревшего оборудования до 50 %. Тогда, в целях борьбы с неэффективностью, очевидно, выгоднее первая стратегия поведения. То же следует и математически из решения задачи (5). Ограничимся здесь рассмотрением только этого простого иллюстративного примера, хотя на практике почти всегда встречаются крайне неочевидные ситуации (управляемость несколькими факторами неэффективности с наличием отрицательных параметров среди $\delta_1, ..., \delta_m$ и ограничениями на совокупное воздействие), для разрешения которых и был придуман аппарат § 3.

Итак, на что же может рассчитывать наше предприятие, какова априорная оценка его ожидаемого объема производства за 61-й период наблюдения, скажем, при 5 % сырья низкого качества и 5 % персонала низкой квалификации? Ответ на этот вопрос дает следующее соотношение:

$$P_{p+1} = 4{,}569253L^{0{,}214623}K^{0{,}702475},$$

на основе которого также можно сделать и некоторые экономические выводы о текущем положении дел на исследуемом объекте (эластичностях и т. п.).

Теперь получим ответ на тот же вопрос с позиций классического регрессионного анализа. Итак, применение обыкновенного метода наименьших квадратов (МНК) для тех же исходных данных (построение классической нормальной линейной регрессионной зависимости объема производства от производственных факторов без учета факторов неэффективности) приводит нас к тому, что при априорной оценке ожидаемого объема производства следует использовать соотношение

$$P^{OLS} = 11{,}601663L^{-0{,}167316}K^{0{,}150734}. \qquad (6)$$

При этом значение F-статистики составляет 2,319484, что меньше критического значения $F_{0,95}(2; 57) = 3{,}158843$, т. е. уравнение регрессии (6) не является статистически значимым на 5%-м уровне. Этого уже достаточно, чтобы сказать, что доверять ему не следует.

Попробуем включить факторы неэффективности z_{i1}, z_{i2} и z_{i3} в список объясняющих переменных наряду с x_{i1} и x_{i2}, т. е. построим классическую нормальную линейную регрессионную зависимость объема производства от производственных факторов и факторов неэффективности. Тогда применение обыкновенного МНК приводит нас к соотношению

$$P^{OLS} = 51{,}455860L^{0{,}269280}K^{0{,}818891}(\exp(z_1))^{-0{,}052213} \times \\ \times (\exp(z_2))^{-0{,}104077}(\exp(z_3))^{-0{,}156488}. \qquad (7)$$

При этом значение F-статистики составляет 5,122700, что больше критического значения $F_{0,95}(5; 54) = 2{,}386070$, т. е. уравнение регрессии (7) статистически значимо на 5%-м уровне. Стандартный регрессионный анализ (воспроизводить здесь промежуточные вычисления не будем) указывает на статистическую незначимость параметров β_1 и δ_1 в уравнении (8).

Исключим факторы x_{i1} и z_{i1} из списка объясняющих переменных x_{i1}, x_{i2}, z_{i1}, z_{i2} и z_{i3}. Тогда применение обыкновенного МНК приводит нас к соотношению

$$P^{OLS} = 58{,}452246L^{0{,}826722} \times \\ \times (\exp(z_2))^{-0{,}108762}(\exp(z_3))^{-0{,}110204}. \qquad (8)$$

Подобрав значение z_2, максимизирующее P^{OLS} (в случае данного примера это несложно — ответом, очевидно, будут те же 5 %), получаем соотношение, дающее априорную оценку ожидаемого объема производства:

$$P = 19{,}557889K^{0{,}826722}.$$

Значение F-статистики составляет 7,788282, что больше критического значения $F_{0,95}(3;\ 56) = 2{,}769431$, т. е. уравнение регрессии (8) статистически значимо на 5%-м уровне. Далее, стандартный регрессионный анализ указывает на статистическую значимость всех параметров в уравнении (8). Наконец, анализ остатков показывает, что их выборочное среднее равно нулю, а наблюденный уровень значимости критерия хи-квадрат Пирсона проверки гипотезы об их нормальности оказывается равен 0,655790. Таким образом, все условия теоремы Гаусса—Маркова для модели (8) выполняются и применение классического нормального линейного регрессионного анализа к исходным данным вполне оправданно.

Теперь заметим, что максимум логарифмической функции правдоподобия для модели (8) составляет (−41,492044), а максимум логарифмической функции правдоподобия, полученный в § 2, составляет (−39,857161). Возникает вопрос: стоил ли стольких усилий столь незначительный выигрыш? Так, если требуется получить только «предсказание», то в нашем конкретном случае пользоваться логичнее той моделью, которая проще в смысле вычислений, т. е. основана на обыкновенном МНК. Тем более, что эта модель обладает неоспоримыми преимуществами по сравнению с моделью, основанной на концепции граничной стохастической производственной функции. В самом деле, достаточно упомянуть лишь о возможности проверки статистической значимости уравнения модели и его параметров. Это невозможно в рамках концепции граничной стохастической производственной функции, так как не выполняются условия теоремы Гаусса—Маркова.

Однако дополнительной информацией, которую можно получить на основе имеющихся данных, применяя концепцию граничной стохастической производственной функции, и невозможно получить, применяя классический регрессионный анализ, служат производственные эффективности производственного процесса в течение каждого прошедшего периода наблюдения. Зачастую данная информация бывает очень существенной, и именно для ее получения и была создана указанная концепция. Сравнение эффективностей позволяет выявить самые эффективные и, что еще важнее, самые неэффективные периоды деятельности экономического объекта. Решение же о том, нужна ли такая информация, принимается каждым аналитиком в соответствии с его личными целями и целями руководства исследуемого экономического объекта. Заметим лишь, что данная информация появляется апостериори, т. е. это информация на основе прошлого о прошлом. Цель же данной статьи состояла в разработке приложения, которое смогло бы существенно расширить результативность и возможности концепции, позволив оценивать будущее.

Таким образом, если есть намерение применить к каким-то данным концепцию граничной стохастической производственной функции, то, по мнению автора, будет очень разумным и полезным сравнить полученные на ее основе результаты с результатами, которые позволит получить лучшая из возможных моделей, основанных на классическом регрессионном анализе.

В заключение автор выражает признательность рецензентам за внимательное прочтение рукописи и полезные замечания, а также Е.В. Чепурину, Л.А. Муравью и С.А. Панову за понимание и поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Aigner D.J., Lovell C.A.K., Schmidt P.* Formulation and estimation of stochastic frontier production function models // Journal of Econometrics. — 1977. — Vol. 6. — P. 21—37.
2. *Meeusen W., van den Broeck J.* Efficiency estimation from Cobb — Douglas production functions with composed error // International Economic Review. — 1977. — Vol. 18. — P. 435—444.
3. *Battese G.E., Coelli T.J.* Prediction of firm-level technical efficiencies with a generalised frontier production function and panel data // Journal of Econometrics. — 1988. — Vol. 38. — P. 387—399.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.С. Манделем.

Барминский Александр Владимирович —
ассистент кафедры высшей и прикладной математики,
ГОУ ВПО «Международный университет природы, общества и человека «Дубна», ☎8 (496) 212-24-65,
e-mail: a_barminsky@mail.ru.